

Übungen zur Analysis 3

Lösung

6.1 Quantilsfunktionen. Es sei $F : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$ eine streng monoton steigende stetige Funktion mit $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ und $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ und $X = F^{-1} :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ihre Umkehrfunktion. Weiter sei μ die Einschränkung des Lebesguemaßes auf $\mathcal{B}(]0, 1[)$. Zeigen Sie, dass die Verteilung $\mathcal{L}_\mu(X)$ von X auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ die Verteilungsfunktion F besitzt.

Lösung

Für das Bildmaß gilt $\mathcal{L}_\mu(F^{-1})(A) = \mu(F^{-1})^{-1}(A) = \mu(F(A))$ und damit ist die Verteilungsfunktion

$$F_{\mu F}(a) = \mu(F^{-1})^{-1}((-\infty, a)) = \mu(0, F(a)) = F(a).$$

6.2ε Integral mit dem Dirac-Maß = Auswertungsfunktional. Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $a \in \Omega$, δ_a das Dirac-Maß in a , und $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie

$$\int f d\delta_a = f(a).$$

Lösung

Sei $g := \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}$, $c_i \in \mathbb{R}$ mit p. w. disjunkten $A_i \in \mathcal{A}$ und $g_\pm \leq f_\pm$. Es gilt $|\int g d\delta_a| = |c_m| \leq |f(a)|^1$ für $a \in A_m$ und Gleichheit kann erreicht werden durch $\int h_n d\delta_a \uparrow f(a)$ für $h_n = b_n \cdot 1_{f^{-1}(\{f(a)\})}$, $f^{-1}(\{f(a)\}) \in \mathcal{A}$ und

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq b_n \uparrow f(a) & \text{für } f(a) \geq 0 \\ 0 > b_n \downarrow f(a) & \text{für } f(a) < 0 \end{array} \right\}^2.$$

6.3 Es sei $\Omega = \mathbb{R}$, versehen mit dem Lebesguemaß $\hat{\lambda}$ auf der Lebesgueschen σ -Algebra $\hat{\mathcal{A}}$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}_0$

$$A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid 2^n x - \lfloor 2^n x \rfloor \in [0, 2^{-n}]\},$$

wobei $\lfloor y \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq y\}$, sowie rekursiv

$$B_0 = \emptyset, \quad B_{n+1} = A_n \Delta B_n$$

und schließlich

$$C := \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n, \quad D := \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n.$$

Zeigen Sie:

¹ $\text{sign}(c_m) = \text{sign}(f(a))$.

² $f(a) = \infty$ ist möglich.

- (a) $C, D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- (b) Es gilt $x \in C \Leftrightarrow x \in D$ für $\hat{\lambda}$ -fast alle $x \in \mathbb{R}$
- (c)* Ist $E \subseteq \Omega$ eine Menge mit $x \in C \Leftrightarrow x \in E$ für $\hat{\lambda}$ -fast alle $x \in \mathbb{R}$, so ist E dicht in $\mathbb{R}$ und besitzt leeres Inneres.
- (d)* Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) = 1_C(x)$ für $\hat{\lambda}$ -fast alle $x \in \mathbb{R}$, so ist f auf keinem Intervall $[a, b]$ mit reellen Zahlen $a < b$ Riemann-integrierbar.
- (e)* Berechnen Sie $\int_{[0,1]} 1_C d\hat{\lambda}$.
(Im Ergebnis darf z.B. ein unendliches Produkt stehen.)

Lösung

Wir bemerken zunächst, dass jede Menge A_n invariant unter Addition ganzer Zahlen ist, d.h. $A_n = k + A_n$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Es genügt also $A_n \cap [0, 1]$ zu betrachten, da $A_n = (A_n \cap [0, 1]) + \mathbb{Z}$ ist.

Wir behaupten, dass

$$A_n \cap [0, 1] = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n} + 2^{-2n} \right].$$

Denn $x \in A_n \cap [0, 1] \Leftrightarrow x \in [0, 1]$ und $2^n x \leq k + 2^{-n}$ für ein $0 \leq k \leq 2^n - 1$, was äquivalent zu $x \leq \frac{k}{2^n} + 2^{-2n}$ ist. Damit folgt (a) unmittelbar, denn A_n ist als Vereinigung abgeschlossener Intervalle eine Borelmenge und die Borelalgebra ist abgeschlossen unter symmetrischer Differenz und $\liminf$ und $\limsup$.

Man überprüft leicht, dass die symmetrische Differenz zweier Mengen, die invariant unter Addition ganzer Zahlen ist, wieder invariant unter Addition ganzer Zahlen ist. D.h. die Mengen B_n sind wieder $\mathbb{Z}$ -invariant und es genügt $B_n \cap [0, 1]$ zu betrachten. Ebenso sind $\liminf B_n = \bigcup_k \bigcap_{n \geq k} B_n$ und $\limsup B_n$ $\mathbb{Z}$ -invariant.

(b) Die Aussage ist äquivalent dazu, dass $C \setminus D$ und $D \setminus C$ Nullmengen sind. Wegen $C = C \cap [0, 1] + \mathbb{Z}$ (und analog für D), genügt es sogar zu zeigen, dass $(C \setminus D) \cap [0, 1]$ und $(D \setminus C) \cap [0, 1]$ Nullmengen sind.

O. B. d. A. (aber mit ein bisschen unkonventioneller Notation) seien die $A_i = A_i \cap [0, 1]$. Beachte $B_1 = [0, 1]$. Wegen $C \subset D$ genügt es $\hat{\lambda}(D \setminus C) = 0$ zu zeigen.

Behauptung I. $x \in D \setminus C \Leftrightarrow x \in A_j$ für unendlich viele j .

Beweis der Behauptung I. $\Leftarrow$: Da $x \in A_{l(j)}$, l streng monoton steigend, für unendlich viele $j \geq 1$, ist auch $x \in B_{i(j)}$, i streng monoton steigend, für unendlich viele $i(l(j))$. Genauer $i(l(j)) = l(j) + 1$ für j gerade. Ebenso ist $x \notin B_{i(l(j))}$ für j ungerade.

$\Rightarrow$: Wir finden eine Folge von B_{i_j} , s. d. für $j \geq 1$ ungerade $x \in B_{i_j}$ und $x \notin B_{i_{j+1}}$, i monoton steigend. Dann gibt es nach Konstruktion für alle j ein A_k , $i_j \leq k < i_{j+1}$ s. d. $x \in A_k$. $\diamond$

Es ist also $D \setminus C = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m$. Es gilt mit σ -Subadditivität $\hat{\lambda}(\bigcup_{m \geq n} A_m) \leq \sum_{m \geq n} \hat{\lambda}(A_m) = \sum_{m \geq n} \frac{2^m}{2^{2m}} = \sum_{m \geq n} \frac{1}{2^m} = 2 - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k}$. Sei $C_k :=$

$\bigcap_{n \leq k} \bigcup_{m \geq n} A_m = \bigcup_{m \geq k} A_m$, $\hat{\lambda}(C_0) \leq 1 < \infty$. Mit σ -Stetigkeit von oben folgt jetzt $\hat{\lambda}(D \setminus C) = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\lambda}(C_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (2 - \sum_{n=1}^{k-1} 2^{-n}) = 0$.

(e) Wir zeigen, dass jedes $B_n \cap [0, 1]$, $n \geq 2$ Maß $\frac{1}{2}$ hat. Es folgt dann aus dem Lemma von Fatou und Teil (b):

$$\hat{\lambda}(C) \leq \liminf \int_{[0,1]} 1_{B_n} d\hat{\lambda} = \frac{1}{2} = \limsup \int_{[0,1]} 1_{B_n} d\hat{\lambda} \leq \hat{\lambda}(D) \Rightarrow \hat{\lambda}(C) = \frac{1}{2}.$$

Behauptung II. Für $j \geq 2$, $\forall n \geq j$ liegt die Hälfte aller $A_n^k =]\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}}[$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$ in B_j .

Beweis der Behauptung II. Aufgrund der Konstruktion wissen wir, dass für A_{n+1}^k (mit Länge 2^{-2n-2} entweder $A_{n+1}^k \subset B_n$ oder $A_{n+1}^k \subset B_n^c$. Es ist $\overline{A_0} = [0, 1]$ (wie oben Beschränkung auf das interessante Intervall), $B_0 = \emptyset$, $B_1 = [0, 1]$, $\overline{A_1} = [0, 1/4] \cup [1/2, 3/4]$, $B_2 =]1/4, 1/2[\cup]3/4, 1]$, $\overline{A_2} = [0, 1/16] \cup [1/4, 5/16] \cup [1/2, 9/16] \cup [3/4, 13/16]$. Wir induzieren nach j . Der Induktionsanfang für $j = 2$ ist klar. Sei A_n^k , $n \geq j+1$. Offensichtlich sind einige der A_n^k in A_j .³ Die Hälfte dieser Intervalle ist nach Induktionsvoraussetzung auch in B_j , ist also in $A_j \cap B_j \subset B_{j+1}^c$. Die andere Hälfte ist in $A_j \setminus B_j \subset B_{j+1}$. Von den verbleibenden A_n^k (nicht in A_j) ist nach Induktionsvoraussetzung wieder die Hälfte in B_j und offensichtlich keines in A_j , d. h. die Hälfte in $B_j \setminus A_j \subset B_{j+1}$. Die verbleibende Hälfte ist im Komplement A_j^c und im Komplement B_j^c , also in B_{j+1}^c . $\diamond$

Bemerkung. Der Beweis funktioniert auch, wenn wir eine Menge $\overline{A_n^k} \subset B_n$ als Grundlage nehmen und diese weiter zerlegen. Genauer liegt für $n \geq 2$, $\forall l \geq n$ die Hälfte der $C_l^j =]\frac{k}{2^n} + \frac{j}{2^{n+l}}, \frac{k}{2^n} + \frac{j+1}{2^l}[$, $l \geq 0$, $j = 0, \dots, 2^l - 1$ in $\overline{A_n^k} \subset B_n$.

Als Folgerung erhalten wir jeweils (da die A_n^k für n fest gleiches Maß haben), dass wir immer genau soviel Volumen abziehen, wie wir wieder addieren. Das Volumen bleibt also ab B_2 gleich $\frac{1}{2}$.

(c) Ang. $U \subset E^c$. O. B. d. A. sei $U =]a, b[\subset [0, 1]$. Dann gibt es Intervalle $A_{n+1}^{2k} = [\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2(n+1)}}] \subset A_n^k = [\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}}] \subset U$ und entweder $A_n^k \subset B_n$ oder $A_{n+1}^{2k} \subset B_{n+1}$. Mit der Bemerkung nach Behauptung II (siehe oben) sowie der Rechnung aus Teil (e) wissen wir, dass das Volumen $\hat{\lambda}(C \cap U) \geq \hat{\lambda}(C \cap A_{n+1}^{2k}) = \frac{1}{2^{-2(n+1)}} \cdot \frac{1}{2} > 0$ ist. Somit gilt $\hat{\lambda}(C \setminus E) \geq \hat{\lambda}(C \cap U) > 0$.

Analog zeigt man für $U \subset E$, dass $\hat{\lambda}(E \setminus C) \geq \hat{\lambda}(U \setminus C) > 0$.

(d) Für jede Treppenfunktion $h_n \geq 1_C$ gilt nach Teil (c), $h_n \geq 1_{[a,b]}$ und analog $g_n \leq 1_C \Rightarrow g_n \leq 0$. Es folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$.

6.4 Inklusions-Exklusions-Formel. Es sei μ ein endliches Maß auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse.

(a) Zeigen Sie:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{I: \emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \quad (1)$$

³Alle Intervalle von A^j werden getroffen.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Gleichung

$$1 - 1_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \prod_{i=1}^n (1 - 1_{A_i}).$$

Multiplizieren Sie die rechte Seite dieser Gleichung aus und integrieren Sie dann über μ .

- (b)ε Was erhält man aus der Inklusions-Exklusions-Formel (1) in den Spezialfällen $n = 2$ und $n = 3$? Vergleichen Sie mit den Teilaufgaben 1. und 4. der Übung 1.11.

Lösung

- (a) Mit Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ zeigen wir $1 - 1_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \prod_{i=1}^n (1 - 1_{A_i})$. Für $n = 1$ ist die Gleichung offensichtlich richtig. Weiter gilt

$$\begin{aligned} 1 - 1_{A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}} &= 1 - 1_{A_1 \cup \dots \cup A_n} - 1_{A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - 1_{A_1 \cup \dots \cup A_n} - 1_{A_{n+1}} + 1_{A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^n A_i} \\ &= 1 - 1_{A_1 \cup \dots \cup A_n} - 1_{A_{n+1}} + 1_{A_1 \cup \dots \cup A_n} 1_{A_{n+1}} = (1 - 1_{A_1 \cup \dots \cup A_n})(1 - 1_{A_{n+1}}) \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} (1 - 1_{A_i}). \end{aligned}$$

Das Ergebnis folgt direkt, wenn man erkennt, dass das Produkt genau dann verschwindet, wenn ein Faktor gleich 0 wird, d. h., wenn $\exists j : x \in A_j$. Das ist aber gerade die Aussage der linken Seite.

Dem Hinweis weiter folgend multiplizieren wir aus

$$\prod_{i=1}^n (1 - 1_{A_i}) = 1 - \sum_{i=1}^n 1_{A_i} + \sum_{i,j=1}^n 1_{A_i \cap A_j} - \dots = 1 - \sum_{I: \emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} 1_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$

und erhalten durch Integration (und $P(\Omega) < \infty$) das gewünschte Ergebnis.

- (b)ε Für $n = 2$ erhält man $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ (1.11.1) und für $n = 3$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) \\ &\quad - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3), \end{aligned} \quad (1.11.4).$$

6.5 Riemann-Integral als Spezialfall des Lebesgue-Integrals. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall, $\hat{\mathcal{A}}$ die Lebesguesche σ -Algebra (= Vervollständigung der Borelschen σ -Algebra bezüglich des Lebesguemaßes) darüber und $\hat{\lambda}$ das Lebesguemaß auf $\hat{\mathcal{A}}$. Zeigen Sie: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt $f \in M([a, b], \hat{\mathcal{A}})$ und

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f(x) \hat{\lambda}(dx)}_{\text{Lebesgue-Integral}} = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{Riemann-Integral}}.$$

Das Riemann-Integral stimmt also nicht nur auf stetigen Funktionen, sondern auch auf Riemann-integrierbaren Funktionen mit dem Lebesgue-Integral überein, wenn man die Lebesguesche σ -Algebra statt der Borelschen σ -Algebra verwendet. Dies gilt selbst dann, wenn f nicht Borel-messbar ist.

Lösung

Sei $g_n \leq f \leq h_n$ Folgen von Treppenfunktionen (vgl. Analysis I, Def. 5.4) auf $[a, b]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (h_n - g_n)(x) dx = 0$. Da g_n und h_n Lebesgue-messbar sind existieren die Integrale sowohl als Riemann-, als auch als Lebesgue-Integrale und $g := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$, $h := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$ sind messbar haben das gleiche Integral. Genauer: Sei $H_n \geq f$ eine beliebige Folge von Treppenfunktionen. Dann ist $\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot 1_{[a, b]} =: H_{\max} \geq \min\{H_n, H_{\max}\} \geq \min_{j \leq n} \{H_j, H_{\max}\} =: h_n \geq f$ und h_n ist eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen. Mit dem Satz über monotone Konvergenz können wir Integral und Grenzwert vertauschen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n(x) dx = \int h(x) dx$. Analog für g .

Sei $N := \{x \in [a, b] : g(x) \neq f(x)\} \subset M := \{x \in [a, b] : g(x) \neq h(x)\}$, M messbar. Dann ist für $M_m := \{x \in [a, b] : h(x) - g(x) \geq 1/m\}$ messbar, $M = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_m$ und $\hat{\lambda}(M_m) = \int_a^b 1_{M_m} d\hat{\lambda} = 0$ da

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (h_n - g_n)(x) d\hat{\lambda}(x) = \int_M (h - g)(x) d\hat{\lambda}(x) \geq \int_{M_m} (h - g)(x) d\hat{\lambda}(x) \\ &\geq \frac{1}{m} \int_{M_m} d\hat{\lambda} = \frac{\hat{\lambda}(M_m)}{m}. \end{aligned}$$

Damit ist M_m eine Nullmenge und somit auch M und schließlich N . Somit unterscheidet sich f um eine Nullmenge von einer messbaren Funktion g , also ist f Lebesgue-messbar: Sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann ist $f^{-1}(A) = g^{-1}(A) \setminus N \cup N' \in \hat{\mathcal{A}}$ für Nullmengen N, N' . Insbesondere stimmen nach den vorangegangenen Rechnungen die Integrale überein.